Gödels bevis

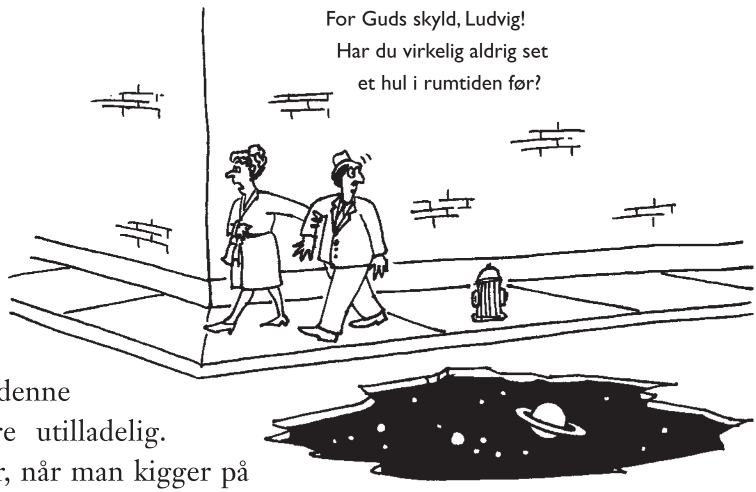
I 1930'erne viste Kurt Gödel og Alan Turing, at det var umuligt at formalisere al matematik. Hvorfor? Fordi ethvert formelt aksiomatisk system enten er inkonsistent eller ufuldstændigt. At et formelt aksiomatisk system er inkonsistent betyder, at det beviser falske teoremer, falske sætninger. At et formelt aksiomatisk system er ufuldstændigt betyder, at det ikke beviser alle sande teoremer. Begge ting er ganske irriterende, når man nu har gjort sig så mange anstrengelser for at gøre det omvendte: at opbygge et konsistent og fuldstændigt formelt system, som kan vise, om et hvilket som helst matematisk udsagn i systemet er rigtigt eller forkert.

Gödels bevis blev offentliggjort i et tysk tidsskrift under titlen "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme" (om uafgørlige sætninger i *Principia Mathematica* og relaterede systemer). Analysen var en enorm kraftpræstation. For at komme i gang skulle Gödel først udarbejde 46 forberedende definitioner og gennemgå en lang række indledende teoremer.

For at give en fornemmelse af argumenterne i Gödels bevis skal det her gennemgås – men på et plan, der bruger andre definitioner af "konsistens" og "fuldstændighed" end dem, Gödel brugte. De er dog semantisk ækvivalente. Gödel startede med at kigge på det klassiske løgnerparadoks: "Denne sætning er usand." Hvilken lære kan man drage ud af dette paradoks? Hvis sætningen taler sandt, er den usand. Hvis den er usand, er den sand. Det betyder, at den hverken kan være sand eller usand, og det er ikke tilladt i den konventionelle matematik ifølge det før-

I René Magrittes' berømte billede *Ceçi n'est pas une pipe* fra 1926 behandles problemet med at sammenblande ting og deres repræsentationer. Det er jo faktisk ikke en pibe, man ser, men kun et billede af den. Og selv hvis der hang en "rigtig" pipe i stedet for et billede af den, kunne sætningen stadig være sand: piben kunne være en attrap, eller sætningen kunne referere til lærredets baggrundsfarve, ikke til piben. Gödels sætning "Denne sætning er ubeviselig" viser, at paradokser kan stikke dybere endda. Hans sætning refererer kun til sig selv, og ikke til noget uden for det aksiomatiske system (et billede, en attrap eller en baggrundsfarve). Og stadig kan vi ikke afgøre, om sætningen er sand eller falsk · Los Angeles County Museum of Art © Rene Magritte/billedkunst.dk.

På trods af konstruktivisternes/intuitionisternes advarsler har fysikere og matematikere som regel ingen problemer med uendeligheder, paradokser og singulariteter.



omtalte *tertium non datur*. Oversat til matematiske ligninger ville denne sætning altså være utilladelig. Men hvad sker der, når man kigger på udsagnet "Denne sætning er ubeviselig", og koder den som numeriske ligninger, således at den udgør et bestemt formelt aksiomatisk system (med 46 definitioner). Ville denne sætning også være utilladelig? Der er to muligheder. Enten er sætningen beviselig, og altså et tilladeligt matematisk teorem, eller ubeviselig, og derfor et utilladeligt teorem (det må lige nævnes, at en sætning, der er "beviselig" i moderne logik, betyder, at den også er sand, mens det for en sætning ikke er nok at være sand for at være beviselig. Med andre ord er prædikatet "sand" – forstået som værende i overensstemmelse med virkeligheden – nødvendigt for en beviselig sætning, men ikke tilstrækkeligt til at den kan bevises). I tilfælde af at sætningen er beviselig, må dens indhold altså være sandt, dvs. at dens semantiske indhold er i overensstemmelse med virkeligheden. Men da sætningen jo siger, at den er ubeviselig, betyder det, at den er usand. Her er vi igen i en aksiomatisk utilladelig situation, fordi vi hermed beviser en forkert sætning. Ergo arbejder vi med et inkonsistent aksiomatisk system, som indeholder usande teoremer. Det må ikke ske. Lad os derfor kræve, at det ikke kan ske! Vi kræver – som nødvendig hypotese – at Gödels sætning er ubeviselig. Men det er heller ikke godt, fordi vi så ved, at sætningen "Denne sætning er ubeviselig" er sand – og dermed er vores analyseapparat jo ufuldstændigt. Det fanger ikke alle sande sætninger. Konklusionen må være, at vores formelle aksiomatiske system enten beviser usande sætninger (meget ubehageligt), eller at den ikke kan bevise alle sande sætninger (mindre slemt, men ærgerligt). Hvis man kræver konsistens, bliver det ufuldstændigt. Hvis man kræver fuldstændighed, bliver det inkonsistent. Matematik i den form, Hilbert forestillede sig, undslipper ikke paradokserne: den fuldstændige formalisering er umulig.

Reaktionerne var til at starte med stor forbløffelse. Logikkens og matematikkens fundamenter var pludselig blevet gennemhullet, og mange matematikere mistede en hel del entusiasme til at fortsætte ud af den vej, som Hilbert havde udstukket for dem. Men det viste sig i løbet at meget kort tid, at matematikernes normale hverdag slet ikke blev berørt af Gödels resultater. Man kunne lige så godt ignorere problemerne og fortsætte som altid, fordi man kun ville komme i problemer i de mest obskure og mærkelige udkanter af matematisk forskning. Selv i dag er Gödels bevis mere berømt blandt videnskabsteoretikere og filosoffer end blandt praktiserende matematikere.

Det er også interessant at iagttage, at Brouwers konstruktivistiske matematiske filosofi er den eneste, som undgår paradokser og inkonsistenser. Det skyldes, at Brouwer er meget forsigtig med hensyn til, hvad man ifølge ham kan udtale sig om. Men på trods af det har den matematiske konstruktivisme altid været den mest marginaliserede blandt de matematiske skoler, der opstod i begyndelsen af 1900-tallet. Måske skyldes det den omstændighed, at tal og matematiske beviser virker så reelle, så virkelige, når man sidder og arbejder med dem dagen lang, at de fleste matematikere får et meget "platonisk" forhold til deres fag. Matematikkens urimelige effektivitet med hensyn til at beskrive verden kan nærmest tvinge én til at tro, at matematik er lige så konkret og virkeligt som den stol, man sidder og arbejder på.

Turing og den universelle maskine

Den engelske matematiker Alan Turing fremlagde i 1936 en endnu dybere begrundelse for ufuldstændighed end Gödel, samtidig med at han udviklede det teoretiske grundlag for den moderne computer. I Alan Turings samtid blev ordet "computer" stadig forstået som værende et menneske, der arbejdede med at beregne. Det var derfor en meget kontroversiel ide at betragte mentale processer som noget, der kunne splittes op i simple mekaniserbare operationer.

En såkaldt Turingmaskine er en abstrakt repræsentation af en regnemaskine. Selvom Turing ikke rent fysisk byggede den første "moderne" computer – det gjorde amerikaneren John Vincent Atanasoff (1903-95) – kan man med god ret sige, at Alan Turing på et teoretisk plan opfandt den før-